KVANTITATIVNE METODE U GRAĐEVINSKOM MENADŽMENTU

predavanja 2017/18

TEORIJA VJEROVATNOĆE

1. Uslovna vjerovatnoća
2. Totalna vjerovatnoća
3. Bajesova teorema

P2

Uslovna vjerovatnoća

- **apsolutna vjerovatnoća P(A)** događaja A je ona koja samo zavisi od uslova koji proističu iz realizacije eksperimenta
- **uslovna vjerovatnoća P(A|B)** je vjerovatnoća događaja A pod uslovom da se realizovao događaj B koji ima pozitivnu vjerovatnoću P(B).
  - Ako je P(B)>0, onda je uslovna vjerovatnoća događaja A, pod uslovom da se realizovao događaj B, jednaka

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

  - Vjerovatnoća proizvoda dva događaja jednaka je proizvodu vjerovatnoće jednog od njih i uslovne vjerovatnoće drugog, pod uslovom da se prvi događaj realizovao

$P(AB) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$, odnosno za slučaj tri događaja

$$P(ABC) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|AB) \;\; *$$

*Formula se može generalizovati i za proizvod n događaja.

Nezavisni i zavisni događaji

- Neka su A i B dva događaja nekog eksperimenta. Ako ostvarivanje jednog od njih ne utiče na vjerovatnoću ostvarivanja drugog događaja, kažemo da su ti događaji **nezavisni**

  kod nezavisnih događaja je : P(A|B)=P(A) i P(B|A)=P(B), pa kad se to zamijeni u formulu uslovne vjerovatnoće

  $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=P(A)$, slijedi: P(AB)=P(A)x P(B)

  Događaji A i B su nezavisni ako je vjerovatnoća njihovog proizvoda jednaka proizvodu njihovih vjerovatnoća.

- Obrnuto, ako ostvarivanje jednog od događaja utiče na vjerovatnoću ostvarivanja drugog događaja, onda kažemo da su ti događaji **zavisni**

Uslovna vjerovatnoća

- **Primjer 1.** Eksperiment se sastoji u bacanju dvije kockice za igru. Ako su kockice pokazale zbir 10, kolika je vjerovatnoća da na jednoj od njih bude broj 6?

  Rješenje. Neka je događaj A: „ Na jednoj od kockica je pao broj 6“ , događaj B: „ Zbir brojeva na obe kockice je 10“ . Traži se P(A|B) , odnosno vjerovatnoća da je pao je broj 6 pod uslovom za je zbir 10. Po formuli za uslovnu vjerovatnocu: je

  P(A|B)=P(AB)/P(B).

  U bacanju dvije kockice elementarni događaj može biti uređeni par (x,y), gdje x predstavlja broj na prvoj, a y broj na drugoj kockici, pri čemu $x\epsilon\{1,2,3,4,5,6\}$ i $y\epsilon\{1,2,3,4,5,6\}$. Pošto se x može realizovati na 6 načina, a nezavisno od toga se i y može realizovati na 6 načina, ukupno **može biti 6*6=36 elementarnih događaja (n=36)**. To smo mogli sračunati i kao broj varijacija sa ponavljanjem 2.og razreda od 6 brojeva, odnosno $V=6^2$

  Uredjeni parovi kod kojih je zbir 10 su {(4,6) (5,5) (6,4) (5,5)}, dakle ukupno ih ima 4, odnosno **m(B)=4,** a vjerovatnoća događaja B je **P(B)=4/36**

  Uredjeni parovi kod kojih je makar jedna šestica i zbir 10 su {(4,6) (6,4)}, dakle ukupno ih ima 2, odnosno **m(A)=2,** a vjerovatnoća je **P(AB)=2/36**

  Prema formuli je : P**(A|B)=P(AB)/P(B)=(2/36)/(4/36)=0,5**

- **Primjer 16**. U kutiji se nalazi 10 ceduljica na kojima su ispisani brojevi od 1 do 10 Izvlačimo na slučajan način tri ceduljice, jednu za drugom, bez vraćanja. Kolika je vjerovatnoća da na sve tri izvučene ceduljice budu parni brojevi?

  Rješenje. Neka je događaj A: „ Na prvoj ceduljici je izvučen paran broj “ , događaj B: „Na drugoj ceduljici je izvučen paran broj“, događaj C: „Na trećoj ceduljici je izvučen paran broj“. Kako su događaji zavisni, biće

  P(ABC)=P(A) P(B|A) P(C|AB) = (5/10)x(4/9)x(3/8)=1/12

Totalna vjerovatnoća

- Neka je S skup elementarnih događaja nekog eksperimenta i neka su H1, H2,...,Hn slučajni događaji **(hipoteze)** koji čine potpun sistem događaja tog eksperimenta, S=H1UH2 ... Hn i važi da je Hi ∩Hj =*Φ* , za i j, i,j=1,2,...,n. Neka je A neki događaj takav da je

  A ⊂ S, tada je A=S∩A, odnosno A= (H1UH2UH3 ... Hn)∩ A.

  Koristeći distributivnost presjeka prema uniji imamo:

  A=(H1∩ A) U(H2∩A)U ... (Hn∩ A)

  Kako su događaji H1, H2,...,Hn po pretpostavci međusobno isključivi, to su i događaji H1∩ A, H2∩ A,..., Hn∩ A međusobno isključivi, pa je vjerovatnoća ove unije jednaka zbiru vjerovatnoća

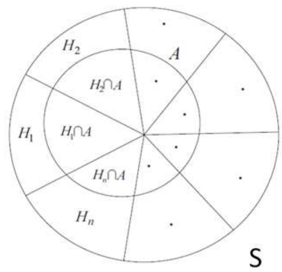
  P(A)=P(H1A)+P(H2A)+...+P(HnA)

  Međutim, za svako k (1≤ k ≤n) važi da je P(HkA)=P(Hk)P(A|Hk) –*na osnovu uslovne vjerovatnoće za realizaciju događaja A, ako se realizovao događaj Hk*

  Potpuna ili totalna vjerovatnoća je:

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k) \cdot P(A|H_k)$$

  vjerovatnoće P(Hk) su obično poznate unaprijed (**a priori**)



Bajesova teorema

- Ako su:
  - H1;H2.....Hn međusobno nesaglasni (isključivi) događaji i
  - P(Hi) > 0 (i = 1,2..n) i
  - H1 + H2 + + Hn = S, tada je

$$P(H_k|A) = \frac{P(AH_k)}{P(A)} = \frac{P(H_k) \cdot P(A|H_k)}{P(A)} = \frac{P(H_k) \cdot P(A|H_k)}{\sum_{k=1}^{n} P(H_k) \cdot P(A|H_k)}$$

- Ova formula daje mogućnost da se sračuna vjerovatnoća da se realizovala hipoteza Hk ako se realizovao događaj A. To bi bila **a posteriorna** vjerovatnoća hipoteze Hk
- Bayesovu formulu koristimo kad želimo naći istinitu hipotezu iz skupa od n postavljenih hipoteza Hi; i = 1,2...n; ako znamo da se dogodio događaj A. Za svako i računamo P(Hi|A). Ispravnom se smatra ona hipoteza Hi0 za koju je P(Hi0|A)≈1

Totalna vjerovatnoća i Bajesova teorema

- **Primjer 2.** Tri mašine M1, M2 i M3 učestvuju u ukupnoj proizvodnji u razmjeri 60 :30 : 10. Mašina M1 proizvodi 2%, mašina M2 3% i mašina M3 4% neispravnih proizvoda. Ako se slučajno izabere jedan proizvod koji je neispravan, kolika je vjerovatnoća da je bio napravljen na mašini M3

Rješenje. Postavljamo hipoteze-potpun sistem događaja:

H1 =”izabrani predmet je sa M1”, P(H1) = 60/100

H2 =”izabrani predmet je sa M2”, P(H2) = 30/100

H3 =”izabrani predmet je sa M3”, P(H3) = 10/100

Hi ∩Hj =Φ , za i j, i,j=1,2,3 S=H1UH2UH3

Dogadaj A koji se dogodio: A=”izabrani proizvod je neispravan”.

Zadate su uslovne vjerovatnoće događaja A uz uslov pojedine hipoteze:

P(A|H1) = 2/100, P(A|H2) = 3/100, P(A|H3) = 4/100

Treba odrediti P(H3|A) uz pomoç Bayesovu formule:

$$P(H_3|A) = \frac{P(H_3)\cdot P(A|H_3)}{\sum_{k=1}^{3} P(H_k)\cdot P(A|H_k)} = \frac{\frac{10}{100}\cdot\frac{4}{100}}{\frac{60}{100}\cdot\frac{2}{100}+\frac{30}{100}\cdot\frac{3}{100}+\frac{10}{100}\cdot\frac{4}{100}} = \frac{4}{25} = 0{,}16$$

Totalna vjerovatnoća i Bajesova teorema

- **Primjer 3.** Pretpostavlja se da 5% muškaraca i 0,25% žena boluje od daltonizma. Grupa je formirana od 20 žena i 5 muškaraca. Kolika je vjerovatnoća da je iz grupe izabrana osoba ženskog pola ako se zna da boluje od daltonizma?

<u>Rješenje</u>. Postavljamo hipoteze-potpun sistem događaja:

H1 =”izabrana osoba je muskog pola”, P(H1) = 5/25=1/5

H2 =” izabrana osoba je zenskog pola”, P(H2) = 20/25=4/5

Hi ∩Hj =Φ , za i j, i,j=1,2 S=H1UH2

Dogadaj A koji se dogodio: A=”izabrana osoba boluje od daltonizma”.

Zadate su uslovne vjerovatnoće događaja A uz uslov pojedine hipoteze:

P(A|H1) = 5/100, P(A|H2) = 0,25/100,

Treba odrediti P(H2|A) uz pomoç Bayesovu formule:

$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2)\cdot P(A|H_2)}{\sum_{k=1}^{2} P(H_k)\cdot P(A|H_k)} = \frac{\frac{4}{5}\cdot\frac{0,25}{100}}{\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{100}+\frac{4}{5}\cdot\frac{0,25}{100}} = \frac{1}{6}$$

Literatura

- Vukadinović, S.: Elementi teorije verovatnoće i matematičke statistike, Privredni pregled, Beograd, 1986
- Vukadinović, S.: Zbirka rešenih zadataka iz teorije verovatnoće, Privredni pergled, Beograd, 1983
- Bruckler, F.M: Pierre de Fermat; Osječki matematički list 5(2005), 37–42
- http://www.e-statistika.rs
- Čuljak, V: Vjerojatnost i statistika, Građevinski fakultet, Sveučilište u Zagrebu, 2011, https://portal.uniri.hr/system/resources/docs/000/004/082/original/Skripta_Vera_%C4%8Culjak.pdf?1413283708
- Tomič, V.: Elementi verovatnoće u srednjoj školi, (master rad), http://www.dmi.uns.ac.rs/site/dmi/download/master/matematika/VojinTomic.pdf